PRIMER PARCIAL

Resolución del problema 2

1. Lo primero que se pide es escribir la expresión para un modo normal de desplazamiento. Para esto necesitamos escribir las condiciones de contorno. Que el tubo esté abierto de los dos lados, significa que en ambos extremos, la presión es P_0. Esto significa que tanto δP como $\delta\rho$ son nulos en esos puntos. Conociendo la relación entre la densidad y el desplazamiento ψ, dada por $\delta\rho(x,t) = -\rho_0 \frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}$. Así obtenemos las dos condiciones de contorno en el desplazamiento

$$\frac{\partial\psi(0,t)}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial\psi(L,t)}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

Sabemos que el desplazamiento sigue la ecuación de ondas,

$$\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2} = v_s^2 \frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}$$

Con v_s la velocidad del sonido.

Proponemos entonces una solución tipo modos normales

$$\psi^p(x,t) = A^p cos(k^p x + \alpha^p) cos(\omega^p t + \phi^p) \tag{2}$$

Reemplazando esta solución en la ecuación de ondas, se obtiene la relación de dispersión ya conocida, $\omega^p = v_s k^p$. Lo que sigue simplemente es escribir explícitamente las condiciones de contorno para esta función propuesta. Realizando las operaciones 1 sobre 2, obtenemos que

$$k^p = \frac{p\pi}{L}$$
$$\alpha^p = m\pi \tag{3}$$

Sin pérdida de generalidad, podemos tomar $\alpha^p = 0$. Por lo tanto, la expresión para un modo normal de desplazamiento está dada por

$$\psi^p(x,t) = A^p cos(\frac{p\pi}{L} x) cos(\omega^p t + \phi^p) \tag{4}$$

Donde A^p y ϕ^p se obtienen con las condiciones iniciales. Cabe aclarar que en 2, también es válido tomar $\psi^p(x,t) = [B^p cos(k^p x) + C^p sen(k^p x)] cos(\omega^p t + \phi^p)$. El resultado va a ser el mismo.

Lo último que pedía este inciso era esquematizar los cuatro primeros modos. Las longiutdes de onda permitidas salen de la relación $\lambda^p = \frac{2\pi}{k^p}$. Les dejo los esquemas de los dos primeros modos de desplazamiento. En este punto se confundieron varios, recuerden que la dependencia espacial de ψ es un coseno!

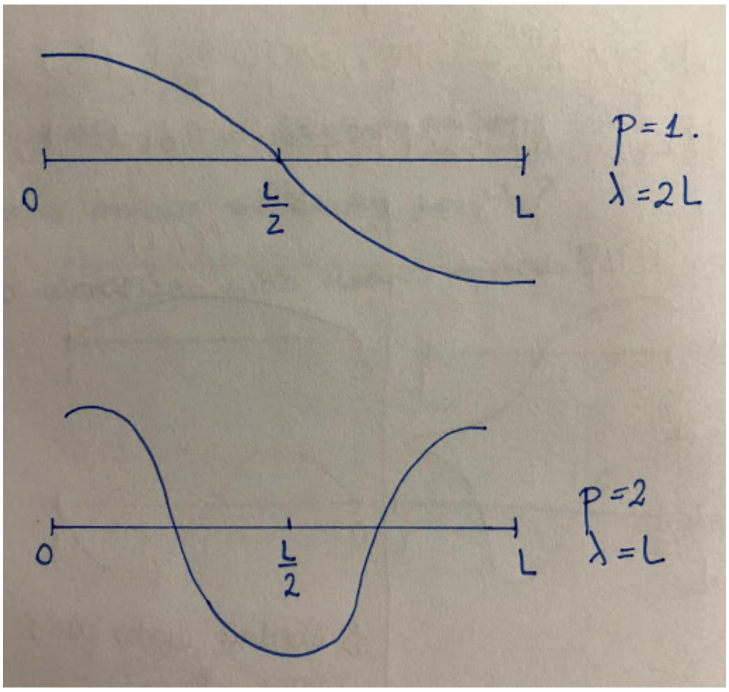

Figura 1: Esquema de los dos primeros modos para ψ.

2. En este inciso solamente se pedía escribir como sumatoria la función hallada en a) y escribir también lo más general posible $\rho(x,t)$. Las expresiones obtenidas son las siguientes

$$\Psi(x,t) = \sum_{p=1}^{\infty} A^p cos(\frac{p\pi}{L}x) cos(\omega^p t + \phi^p)$$
$$\delta\rho(x,t) = \sum_{p=1}^{\infty} A_\rho^p sen(\frac{p\pi}{L}x) cos(\omega^p t + \phi^p) \tag{5}$$

Donde $A_\rho^p = A^p \rho_0 \frac{p\pi}{L}$.

3. Este inciso era sencillo. El modo traslacional existe dado que es un tubo con extremos abiertos. En el mismo, la presión será P_0 y la densidad ρ_0.

4. En este apartado había una ambigüedad en el enunciado. No se aclara si los nodos son de desplazamiento o de densidad. En el caso de que sean de desplazamiento habrá que usar $p = 2$, y si son de densidad, $p = 3$. Lo único que resta hacer es despejar L de la siguiente expresión $\omega = 2\pi\nu = \frac{p\pi}{L} v_s$.

5. En este punto solo es necesario hacer el planteo, las cuentas las dejamos para el inciso que viene. Tenemos dos condiciones iniciales, una está dada por el gráfico de $\delta\rho(x,0)$ como función de x, y la otra es que parte del reposo. Que la velocidad inicial es nula implica que $\dot{\rho}(x,0) = 0$.
Escribamos en general $\rho(x,0)$ y $\dot{\rho}(x,0)$.

$$\delta\rho(x,0) = \sum_{p=1}^{\infty} A_\rho^p sen(\frac{p\pi}{L}x) cos\phi^p \tag{6}$$
$$\dot{\delta\rho}(x,0) = -\sum_{p=1}^{\infty} A_\rho^p sen(\frac{p\pi}{L}x) sen\phi^p \tag{7}$$

Si multiplicamos 6 por $sen(\frac{m\pi}{L}x)$ e integramos entre 0 y L obtenemos

$$\begin{aligned}\int_0^L \delta\rho(x,0) sen(\frac{m\pi}{L}x) dx &= \sum_{p=1}^{\infty} A_\rho^p cos\phi^p \int_0^L sen(\frac{m\pi}{L}x) sen(\frac{p\pi}{L}x) dx \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} A_\rho^p cos\phi^p \frac{L}{2} \delta_{p,m} \\ &= A_\rho^m cos\phi^m \frac{L}{2}\end{aligned} \tag{8}$$

De la misma manera, para la condición inicial en la velocidad 7 tenemos

$$\int_0^L \dot{\delta\rho}(x,0) sen(\frac{m\pi}{L}x)dx = -\sum_{p=1}^{\infty} A_\rho^p sen\phi^p \int_0^L sen(\frac{m\pi}{L}x) sen(\frac{p\pi}{L}x)dx$$
$$= A_\rho^m sen\phi^m \frac{L}{2} \tag{9}$$

De 9 es sencillo ver que $\phi^m = 0$. Por lo tanto, la expresión para despejar la amplitud está dada por

$$A_\rho^m = \frac{2}{L}\int_0^L \delta\rho(x,0) sen(\frac{m\pi}{L}x)dx \tag{10}$$

Con la expresión 10 no podemos ver a simple vista qué modos se van a excitar, pero podemos sacar información del gráfico de la condición inicial. Si hicieramos el esquema de los modos normales para la densidad en lugar del desplazamiento, obtendríamos que tienen la siguiente forma De esta forma,

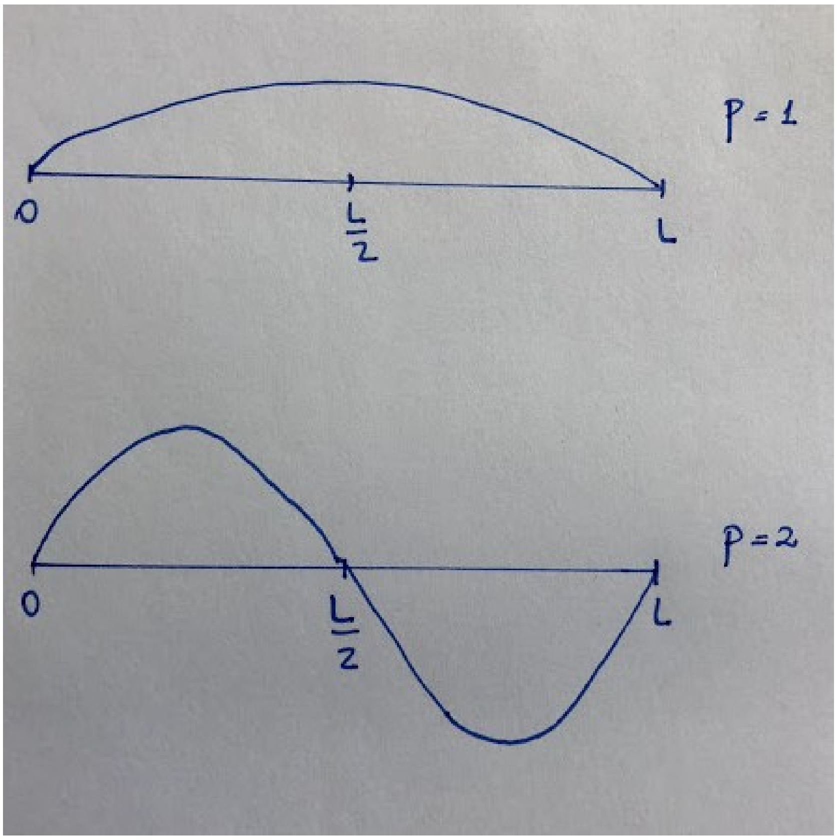

Figura 2: Esquema de los dos primeros modos para $\delta\rho$.

observando el modo 2 en la figura 2 y viendo la forma de la condición inicial, esperamos que se exciten los modos pares.

6. Finalmente, resta hacer la cuenta 10. Primero tenemos que escribir cómo es la función $\delta\rho(x,0)$. Simplemente son tres funciones lineales por tramos.

$$\rho(x,0) = \begin{cases} \frac{4\rho_1}{L}x & 0 < x \leq L/4 \\ -\frac{4\rho_1}{L}x + 2\rho_1 & L/4 < x \leq 3L/4 \\ \frac{4\rho_1}{L}x - 4\rho_1 & 3L/4 < x \leq L \end{cases} \tag{11}$$

Por lo tanto tenemos que hacer tres integrales. Dejo el resultado de cada una y el resultado final.

$$\int_0^{L/4} \frac{4\rho_1}{L} x sen(\frac{m\pi}{L}x)dx = \frac{4\rho_1 L}{(m\pi)^2}\left[-\frac{m\pi}{4}cos(\frac{m\pi}{4}) + sen(\frac{m\pi}{4})\right] \quad (12)$$

$$\int_{L/4}^{3L/4} (-\frac{4\rho_1}{L}x + 2\rho_1)sen(\frac{m\pi}{L}x) =$$

$$-\frac{4\rho_1 L}{(m\pi)^2}\left[-\frac{3m\pi}{4}cos(\frac{3m\pi}{4}) + \frac{m\pi}{4}cos(\frac{m\pi}{4}) + sen(\frac{3m\pi}{4}) - sen(\frac{m\pi}{4})\right] - \frac{2L\rho_1}{m\pi}\left[cos(\frac{3m\pi}{4}) - cos(\frac{m\pi}{4})\right] \quad (13)$$

$$\int_{3L/4}^{L} (\frac{4\rho_1}{L}x - 4\rho_1)sen(\frac{m\pi}{L}x)dx =$$

$$\frac{4\rho_1 L}{(m\pi)^2}\left[-m\pi cos(m\pi) + \frac{3m\pi}{4}cos(\frac{3m\pi}{4}) + sen(m\pi) - sen(\frac{3m\pi}{4})\right] + \frac{4\rho_1 L}{m\pi}\left[cos(m\pi) - cos(\frac{3m\pi}{4})\right] \quad (14)$$

Juntando todos los resultados se cancelan varias cosas. El resultado final queda

$$A_\rho^m = \frac{16\rho_1}{(m\pi)^2}\left[sen(\frac{m\pi}{4}) - sen(\frac{3m\pi}{4})\right] \quad (15)$$

Se puede ver que, de acuerdo a lo que esperabamos, los modos impares no se excitan. Solo se excitan los modos pares que no son múltiplos de 4.